习 题 解 答

第 一 章

1. 参考第二页例1，读者自证.

2. 答：当 $k=1$，$j=9$ 时为偶排列，当 $k=9, j=1$ 时为奇排列，因为这两种情况的逆序数都是偶数.

3. 解：

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-b_j)=(a_2-b_1)(a_3-b_1)\cdots(a_n-b_1)$$
$$(a_3-b_2)(a_4-b_2)\cdots(a_n-b_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdot(a_{n-2}-b_{n-3})(a_{n-1}-b_{n-3})(a_n-b_{n-3})$$
$$\cdot(a_{n-1}-b_{n-2})(a_n-b_{n-2})$$
$$\cdot(a_n-b_{n-1}).$$

第 二 章

1. 解：(1) 从左到右，将排列中每一个数字与其右边的所有数字比较大小：

第一个数字是1它右边的八个数字都比它大，所以排列中与1构成逆序的数字有零个，我们说，由1产生的逆序数是0.

第二个数字是3，它右边的七个数字中只有2比它小，

因此排列中与3构成逆序的数字有1个。我们说，由3产生的逆序数是1。

第三个数字是4，它右边的六个数字中比它小的数字只定有2一个，因此排列中与4构成逆序的数字有1个.我们说由4产生的逆序数量1。

第四个数字是7，它右边的五个数字中比它小的数字有2，6和5三个数字，因此排列中与7构成逆序的数字有3个。我们说，由7产生的逆序数是3。

用同样的方法我们得到排列中第五个数字8所产生的逆序数是3；第六个数字2所产生的逆序数是0；第七个数字6所产生的逆序数是1，第八个数字9所产生的逆序数是1。第九个数字5的右边没有数字了，因此它不可能产生逆序数.

将前面八个数字所产生的逆序数加起来，便是九个数字所组成的排列的逆序数。即

1，3，4，7，8，2，6，9，5的逆序数＝前八个数字分别产生的逆序数之和 $=0+1+1+3+3+0+1+1=10$。

(2) 用上述方法得

2，1，7，9，8，6，3，5，4的逆序数 $=1+0+4+5+4+3+0+1=18$。

(3) 同样，9，8，7，6，5，4，3，2，1的逆序数

$$=8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{8(8+1)}{2}=36.$$

2.(1)解：很明显，i 及 k 只能在3与8两个数字中分别选取一个。若 i 取 $=3$，那么 $k=8$，这样就得到排列1,2,7，4，3，5，6，8，9，经计算，它的逆序数等于5，是奇排列；又因为在排列中交换两个数字的位置而其余数字的位置

不变，就改变了该排列的奇偶性，所以取 $i=8$，$k=3$ 时所得的排列 1，2，7，4，8，5，6，3，9 便成为偶排列（经具体计算知此排列的逆序数等于 10）。

（2）用上述方法可知，当取 $i=3$，$k=6$ 时，所得之排列 1，3，2，5，6，4，8，9，7 成为奇排列，因为它的逆序数等于 5．

3．证：排列 i_1，i_2，…，i_n 的逆序数可以这样计算：从右到左，依次计算每一个数字 i_k 的左边有几个比 i_k 大的数字．

设 i_n 的左边有 m_n 个比 i_n 大的数字，

i_{n-1} 的左边有 m_{n-1} 个比 i_{n-1} 大的数字，

…………

i_3 的左边有 m_3 个比 i_3 大的数字，

i_2 的左边有 m_2 个比 i_2 大的数字，

i_1 是最左边的一个数字，不用计算．于是 i_1，i_2，…，i_n 的逆序数就等于 m_n，m_{n-1}，…，m_3 与 m_2 之和，即

$$m_n+m_{n-1}+\cdots+m_3+m_2=m$$

然后再按第 1 题 1）中叙述的方法计算排列 i_n，i_{n-1}，… i_2，i_1 的逆序数，由上面的假设可知：

i_n 的右边比 i_n 小的数字有 $(n-1)-m_n$ 个．这是因为 i_n 的右边共有 $n-1$ 个数字，其中有 m_n 个数字比 i_n 大的原故．

同理：i_{n-1} 的右边比 i_{n-1} 小的数字有 $(n-2)-m_{n-1}$ 个；……

i_3 的右边比 i_3 小的数字有 $2-m_3$ 个，

i_2 的右边比 i_2 小的数字有 $1-m_2$ 个，

i_1 是最右边的一个数字，不必计算．

可知排列 i_n, i_{n-1}, …, i_2, i_1 的逆序数 $=[(n-1)-m_n]+[(n-2)-m_{n-1}]+\cdots+[2-m_3]+[1-m_2]=[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]-[m_n+m_{n-1}+\cdots+m_3+m_2]$

$=\frac{(n-1)n}{2}-m$.

即 i_n, i_{n-1}, …, i_2, i_1,的逆序数 $+i_1$, i_2, …, 逆序的数 $=\frac{(n-1)n}{2}$.

当 $n=4k$ 或 $4k+1(k=1, 2\cdots)$ 时 $\frac{(n-1)n}{2}$ 为偶数，所给二排列的奇偶性相同；

当 $n=4k+2$, 或 $4k+3$ 时 $\frac{(n-1)n}{2}$ 为奇数，所给二排列的奇偶性相反。

4．解：(1) 将乘积中的六个元素按行的自然顺序排列起来：

$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 由于右端的列下标形成的排列为

$$4, 3, 1, 2, 6, 5$$

其逆序数等于 6，是偶排列，所以该项的符号应是正号（因为 $(-1)^6=1$）。

(2) 同理，因为

$$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}=a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}.$$

而右端的列下标的排列 4, 5, 2, 3, 1, 6 是偶排列，所以该项的符号应是正号。

(3) 因为

$$a_{16}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}a_{25}=a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$$

而右端的列下列的排列 6，4，5，3，2，1 的逆序数等于 15，是奇排列，所以该项的符号应为负号.

5. 解：由行列式的定义知，5 阶行列式的项应是由不同行且不同列的五个元素的乘积组成，并且所带的符号由下述规则确定：先把乘积中各元素的行下标排成自然顺序，若所得相应的列下标排列是偶排列，该项应取正号；若列下标的排列是奇排列，则该项应取负号.

(1) 在 $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$ 中有两个元素 a_{24} 与 a_{23} 都取自第二行. 所以该项不是 5 阶行列式的项.

(2) 因为 $a_{11}a_{23}a_{55}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55}$，右端的下标排列为 1，3，4，2，5 为偶排列，应带正号，故 $+a_{11}a_{23}a_{55}a_{34}a_{42}$ 是 5 阶行列式的一个代数项.

(3) $a_{21}a_{12}a_{34}a_{55}a_{43}=a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55}$，右端的列下标 2，1，4，3，5 是偶排列，应带正号，故 $-a_{21}a_{12}a_{34}a_{55}a_{43}$ 不是 5 阶行列式的一个代数项.

6. 解：按定义，4 阶行列式共 $4!=24$ 个项，但因所为所给行列式每行每列都有两个元素是零，所以 24 个项中有一些一定是零. 因此，我们只需找出所有不等于零的项，再确定它们的符号即可. 由定义知不为零的项只能有下述取法

第一行　第二行　第三行　第四行

$$a_{11} \quad < \quad \begin{matrix} a_{22} \\ a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{33} \\ a_{32} \end{matrix} \quad > \quad a_{44}$$

$$a_{14} \quad < \quad \begin{matrix} a_{22} \\ a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{33} \\ a_{32} \end{matrix} \quad > \quad a_{41}$$

共得四个非零项：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{11} & a_{23} & a_{32} & a_{44} \\ a_{14} & a_{22} & a_{33} & a_{41} \\ a_{14} & a_{23} & a_{32} & a_{41} \end{matrix}$$

经计算这四个项的符号分别应是：+，－，－及+，故得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

7．解：首先可以看出，所给的四阶行列式是 x 的 4 次多项式，因为其中元素 $2-x^2$ 与 $9-x^2$ 位于不同行与不同列上，所以展开式中必定包含这两个元素的乘积 $(2-x^2)(9-x^2) = 18-11x^2+x^4$，这是最高次幂，并且不会被消去。

再利用行列式的性质，一个行列式如果有两行相同，则该行列式为零。不难看出，当 $2-x^2=1$ 或 $9-x^2=5$ 时，即 $x=1$，-1，2，-2 时，行列式为零。这就是说，4 次多项式．

$$f(x)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{bmatrix}$$

有 4 个根：1，-1，2 与 -2。（即 $f(1)=f(-1)=f(2)$
$=f(-2)=0$）。

8．证：将第一列乘以 100 加到第三列上．

得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 507 \\ 2 & 5 & 205 \end{vmatrix}$$

将右端行列式的第二列(同时也是左端行列式的第二列)乘以 10 加到第三列上，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 507 \\ 2 & 5 & 205 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}.$$

上述两步可以这样叙述：将所给行列式的第一列乘以 100，第二列乘以 10，然后一齐加到第三列上．得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}.$$

因为 $204 = 17 \cdot 12$，$527 = 17 \cdot 31$，$255 = 17 \cdot 15$，所以从第三列提出公因数 17．便得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

右端的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

的元素全是整数，由定义知，此行列式的值是由它的元素进行加、减、乘三种运算得出的，而整数经过加、减、乘三种运算的结果仍是整数，所以这个行列式的值是一个整数．这就是说，原行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 17\times\text{整数}$$

即能被 17 除尽．

注意，本题是证明题，不能用计算出所给行列式的值，来验证它能被 17 除尽的方法．

9．证：先分析一下行列式的结构特点：第一列的元素都是1；第二、三、四列的每一行上都出现带正号的 a,b,c,d，再根据使行列式等于零的性质．就得到如下的证明．

将第三、四两列都加到第二列，得

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a+b+c+d & b & c+d \\ 1 & a+b+c+d & c & d+a \\ 1 & a+b+c+d & d & a+b \\ 1 & a+b+c+d & a & b+c \end{vmatrix}$$

因为右端行列式的第一、二两列成比例，所以其值为零。故

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

10．解：先分析一下所给行列式的结构特点．不难得出化简的方法：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$（第一列减去第二、三两列）

$$= \begin{vmatrix} -2a & c+a & a+b \\ -2a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ -2a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$（从第一列提出公因数 -2）

$$= -2\begin{vmatrix} a & c+a & a+b \\ a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$（从第二、三两列分别减去第一列）

$$= -2\begin{vmatrix} a & c & b_1 \\ a_1 & c_1 & b_2 \\ a_2 & c_2 & b_3 \end{vmatrix}$$（交换第二、三两列）

$$= 2\begin{vmatrix} a & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$（右端已是最简单的行列式）

注意，本题不要用定义展开的方法去做。

11. **解:**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (从第二、三、四行中分别减去第一行)

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (这是一个上三角形行列式)

$= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (将第二、三、四列都加到第一列上)

$= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (从第一列提出公因数6)

$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (利用本题(1)的结果)

$= 6 \cdot 8 = 48$.

12. 解：

(1) 首先将第一列中的第二、三、四个元素化为零．为了后面的应用，我们可以这样做：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$ （从第四行减去第三行）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}$$ （从第三行减去第二行）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}$$ （从第二行减去第一行）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}$$ （以上三步，合并起来可叙述为，从最后一行开始，依次将每一行减去其相邻前一行，直接由第一个行列式得到第四个行列式）（按第一列展开）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 12 \\ 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}$$ （从第二列提出公因数 2 从第三列提出公因数 3）

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}$$ （从第三行减去第二行的 2 倍再从第二行减去第一行的 2 倍）

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}$$ （按第一列展开）

$$=6\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}=6(8-6)=12。$$

（2）这是一个 4 阶范德蒙行列式，利用本题(1)的解法，得

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$ （从第四行减去第三行的 a 倍再从第三行减去第二行的 a 倍再从第二行减去第一行的 a 倍）

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\0&b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}$$ （按第一列展开）

$$=\begin{vmatrix}b-a&c-a&d-a\\b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}$$

（从第一列提出公因式 $b-a$
从第二列提出公因式 $c-a$
从第三列提出公因式 $d-a$）

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}.$$

（这个三阶行列式与原行列式的特点是一样的，重复第一步做法：从第三行减去第二行的 b 倍，从第二行减去第一行的 b 倍）

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-bc & d^2-bd\end{vmatrix}$$

（按第一列展开）

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b & d-b\\ c^2-bc & d^2-bd\end{vmatrix}$$

（从第一、二列中分别提出公因式 $c-b$ 与 $d-b$）

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

13．解：本题的五个数字行列式都可用下述方法计算：首先选择一行（或一列）利用保值变换进行化简，即将该行除一个元素外，其余各元素均变成零，然后将列式按此行展开以降低其阶数．反复施用这两步，直到化为二阶行列式，进行最后的计算，并且在进行计算的过程中，随时注意作必要的化简．

(1) $\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$ （选定第三列进行化简：第二行加上第一行，第三行减去第一行的 2 倍，第四行减去第一行）

$$=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ （按第三列展开）

$$=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$ （化简第三行：第一列加上第二列的 2 倍）

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$ （按第三行展开）

$$=(-1)\left(-\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9-18=-9.$$

(2) $$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$ （从第一行提出公因数 3 ）

$$=3\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$ （对第一行进行化简：将第一列的 3 倍、1 倍、2 倍分别加到第二、三、四列上去）

$$=3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$ （按第一行展开）

$$= -3\begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$
（从第一行提出公因数 -1 从第三列提出公因数 3）

$$= 9\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$
（化简第二列：先从第三行减去第一行再从第一行减去第二行的 3 倍）

$$= 9\begin{vmatrix} -14 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
（按第二列展开）

$$= 9\begin{vmatrix} -14 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$
（从第二行提出公因数 2）

$$= 18\begin{vmatrix} -14 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 18(-14+15) = 18.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$
（化简第一列：从第二、三、四、五行分别减去第一行的 2 倍、3 倍，2 倍和 1 倍）

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$
（按第一列展开）

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$ （化简第二列：先从第四行减去第二行，第三行减去第一行，再从第二行减去第一行的2倍）

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -3 & -11 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$ （按第二列展开）

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & -3 & -11 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$ （按第一行展开）

$$=-\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=-(3-55)=52。$$

(4) $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$ （分析：第五列诸元素除第4个元素外比第一列的对应元素都大1。从第五列减去第一列）

$$=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 1 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$ （化简第五列：从第一、二、三行中分别减去第五行）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$（按第五列展开）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$（化简第一行：从第二、三、四列中分别减去第一列）

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$（这是一个下三角形行列式）

$=1\cdot1\cdot5\cdot1=5$

（5）$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$

（分别从第一、二、三、四列提出公因数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{3}$）

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}.$$

（化简第一行：从第二、三、四列的分别减去第一列）

$$=3\sqrt{10}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2}-\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

（按第一行展开）

$$=3\sqrt{10}\begin{vmatrix} \sqrt{7}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2}-\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

（按第二列展开）

$$=3\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{3})\left(-\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2}-\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{vmatrix}\right)$$

（从第二列提出公因数$\sqrt{5}-\sqrt{2}$）

$$=3\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})\begin{vmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$

$$=3\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(5-2)$$

$$=9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

14. 解：在计算n阶行列式的时候，一定要注意行列式的阶数与元素的关系以及它的结构特点．一般说来，计算n阶行列式是比较困难的，这里我们仅选作四个较为简单的n阶行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$ （分析：特点是对角线元素依次为1，2…，n，其余各元素均为2，化简第二列：第二、三、…n行都减去第一行）

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$ （按第二列展开）

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$ （这是$n-1$阶的下三角形行列式）

$$= -2\cdot1\cdot1\cdot2\cdots(n-2) = -2\cdot(n-2)!$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ （分析：特点是每一行都由前n个自然数构成。将第二、三、…n列都加到第一列上）

$$=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3\cdots n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2\cdots n-1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1\cdots n-2 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4\cdots 1 \end{vmatrix}$$

（从第一列提出公因数 $\frac{n(n+1)}{2}$）

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\cdots n \\ 1 & 1 & 2\cdots n-1 \\ 1 & n & 1\cdots n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 3 & 4\cdots 1 \end{vmatrix}$$

（化简第一列）

分析：特点是除对角线元素外每一行都比相邻下一行的对应元素多 1。

从第一行开始，每一行减去其相邻下一行）

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\cdots 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1\cdots 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-n\cdots 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1\cdots 1-n & 1 \\ 1 & 3 & 4\cdots n & 1 \end{vmatrix}$$

（按第一列展开）

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots 1 & 1 \\ 1-n & 1\cdots 1 & 1 \\ 1 & 1-n\cdots 1 & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 1 & 1\cdots 1-n & 1 \end{vmatrix}$$

（化简第一行：
从最后一列开始，每一列减去其相邻前一列。
注意：这是一个 $n-1$ 阶行列式）

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 1-n & n\cdots 0 & 0 \\ 1 & 1-n\cdots 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 1 & 0\cdots 1-n & n \end{vmatrix}$$

（这是一个 $n-1$ 阶下三角形行列式）

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\underbrace{1\cdot n\cdot\cdots n}_{n-2\text{个}}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\cdot n^{n-2}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1).$$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x\cdots x \\ x & a_2 & x\cdots x \\ x & x & a_3\cdots x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x\cdots a_n \end{vmatrix}$ （分析：特点是对角线两侧的元素相同。从第二行起，每一行都减去第一行。）

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & x & x\cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0\cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots a_n-x \end{vmatrix}
$$

（分别从第一、二、…n 列提出公因式 a_1-x，a_2-x，…，a_n-x，）

$$
=(a_1-x_1)(a_2-x)\cdots(a_n-x)
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x}\cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 \quad \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -1 & 0 & 0 \quad \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

（化简第一列：将第二、三、…n 列都加到第一列上）

$$
=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x).
$$

$$
\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\cdots+\frac{x}{a_nx} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x}\cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \quad \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \quad \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

（这是一个上三角形行列式）

$$
=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\cdot\left(\frac{a_1}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x}\right).
$$

(4) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} \\ -x & x & 0 \cdots 0 \\ 0 & -x & x \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots x \end{vmatrix}$ （分析：特点是从第二行到第n行，每行有$-x$与x相邻，可以化为三角形行列式，从第n列开始，依次将每一列加到其相邻前一列上）

$$= \begin{vmatrix} a_0+a_1+\cdots+a_{n-1} & a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} & a_2+a_3+\cdots+a_{n-1} & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= (a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})x^{n-1}.$$

15．解：

（1）先计算系数行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142.$$

因为 $D\neq0$，所以可用克莱姆法则求解

再计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=-142,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}=-284,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-1&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-1&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142.$$

代入求解公式，得所给方程组的唯一解是：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=3,$$

$$x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

（2）先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&3\end{vmatrix}=16。$$

因为 $D\neq0$，所以可用克莱姆法则求解

再计算行列式，

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\2&2&3&0&0\\-2&1&2&3&0\\2&0&1&2&3\end{vmatrix}=16,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\\1&2&3&0&0\\0&-2&2&3&0\\0&2&1&2&3\end{vmatrix}=-16,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&1\\1&2&2&0&0\\0&1&-2&3&0\\0&0&2&2&3\end{vmatrix}=16,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1\\1&2&3&2&0\\0&1&2&-2&0\\0&0&1&2&3\end{vmatrix}=-16,$$

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&2&3&0&2\\0&1&2&3&-2\\0&0&1&2&2\end{vmatrix}=16。$$

代入求解公式便得到所给方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=-1,x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

$$x_4=\frac{D_4}{D}=-1,x_5=\frac{D_5}{D}=1.$$

（3）因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=-16,$$

所以可用克莱姆法则求解：

$$D_1=\begin{vmatrix}a&1&1&1\\b&-1&1&1\\c&1&-1&1\\d&1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b-a & -2 & 0 & 0 \\ c-a & 0 & -2 & 0 \\ d-a & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(d-a)\left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$-2\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b-a & -2 & 0 \\ c-a & 0 & -2 \end{vmatrix}=(d-a)\cdot(-4)$$

$$-2[4a+2(c-a)+2(b-a)]$$

$$=-4(-a+b+c+d).$$

同理

$$D_2=\begin{vmatrix} -1 & a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & c & -1 & 1 \\ 1 & d & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4(a-b+c+d),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} -1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & d & -1 \end{vmatrix}=-4(a+b-c+d),$$

$$D_4=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}=-4(a+b+c-d).$$

由公式，得所给方程组的唯一解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{4}\ (-a+b+c+d),$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{4}(a-b+c+d),$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{4}(a+b-c+d),$$

$$x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{4}(a+b+c-d).$$

16. 解：分析：如果所给方程组的系数行列式不等于零，由克姆法则知道，它有唯一解. 又因为方程右端的常数项都等于零，所以知道 $x_1=0$ $x_2=0$ $x_3=0$ 是它的一个解，综合起来可知，该方程组在其系数行列式不等于零时，仅有零解.

由此，先计算方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k-2 & 2 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} k-2 & 2 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k-2)(k-1)-6=k^2-3k+2-6$$
$$=k^2-3k-4=(k+1)(k-4).$$

当 $k+1\neq0$ 且 $k-4\neq0$，即 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，$D\neq0$，如上分析，所给方程组仅有零解.

第　三　章

1. 解：

(1) A与B的行数，列数对应相等，所以是可以相加的；其和为

$$A+B=\begin{bmatrix}2-2 & 0-2 & -1+2 & 3+0\\ 1+1 & 1+1 & -2-1 & 0+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

(2) 因为A的行数不等于B的行数，所以A与B不可以相加。

2. 解：

$$kA=k\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 2k & 0\\ -k & k & k\\ k & 0 & 2k\end{bmatrix}$$

$$\therefore |kA|=\begin{vmatrix}k & 2k & 6\\ -k & k & k\\ k & 0 & 2k\end{vmatrix}$$

$$=k^3\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=8k^3.$$

$$\text{而}\ k|A|=k\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=k8=8k.$$

3. 解：转置矩阵为：

$$A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},\quad B' = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 1],\quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. 解：

(1) $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1 + 1\times(-1) + 3\times 0 + (-5)\times 5 \\ 1\times 1 + 7\times(-1) + 3\times 0 + 1\times 5 \\ 2\times 1 + (-1)\times(-1) + (-1)\times 0 + 2\times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

因为B的列数不等于A的行数，所以乘积$B\,A$无意义.

(2)
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 9 & 4 \\ -20 & 18 & 8 \\ -21 & 6 & 21 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & -4 & -7 \\ 16 & 40 & 53 \\ -14 & -18 & -23 \end{bmatrix}.$$

(3) $AB=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(4) $AB=[-1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}=[61],$

$$BA=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}[-1 \quad 2 \quad 3 \quad 4],$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -6 & -8 & -12 \\ -4 & 8 & 12 & 16 \\ -6 & 12 & 18 & 24 \\ -8 & 16 & 24 & 32 \end{bmatrix}.$$

(5) $AB=[a_1 \quad a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right].$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}[a_1 a_2 \cdots a_n]$$

$$=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2\cdots b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2\cdots b_2a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_na_1 & b_na_2\cdots b_na_n \end{bmatrix}.$$

(6) $$AB=\begin{bmatrix} x_1 & x_2\cdots x_n \\ y_1 & y_2\cdots y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{bmatrix}.$$

$$BA=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2\cdots x_n \\ y_1 & y_2\cdots y_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2\cdots x_1x_n+y_1y_n \\ x_2x_1+y_2y_1 & x_2^2+y_2^2\cdots x_2x_n+y_2y_n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_nx_1+y_ny_1 & x_nx_2+y_ny_2\cdots x_n^2+y_n^2 \end{bmatrix}.$$

5. 解：

(1)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0。$$

当 $k\geqslant 5$，$A^k = A^4A^{k-4} = OA^{k-4} = 0$

（2）

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \lambda_2\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \lambda_2\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \lambda_2\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{bmatrix}.$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \lambda_2\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{bmatrix}$$

依此类推，得

$$A^k=A^{k-1}A=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k\end{bmatrix}$$

6. 解：$3A^2-2A+5E$

$$=3\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}^2-2\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

$$+5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}6 & -9 & 7\\ -3 & 7 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

$$+5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}18 & -27 & 21\\ -9 & 21 & 12\\ -3 & 12 & 24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 4 & -8 & 2\\ 6 & -10 & 4\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{bmatrix}.$$

7. 证：将A代入方程的左端，计算得：

$$A^2-(a+b)A+(ad-bc)E$$

$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2-(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2+bc-a^2-da+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故矩阵A满足所给方程。

8.（1）证：先证必要性，设$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$成立。将左端展开：

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ 所以有 $A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2=A^2+AB+AB+B^2$ 消去相同的项后就得到 $BA=AB$

再证充分证。设$AB=BA$成立，于是有

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$$
$$=A^2+AB+AB+B^2$$
$$=A^2+2AB+B^2.$$

（2）证：先证必要性，设 $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ 成

立。展开左端：$(A-B)(A+B)=A^2-BA+AB-B^2$

所以有 $$A^2-BA+AB-B^2=A^2-B^2$$

消去相同项后，就得到 $-BA+AB=0$。

即 $$BA=AB.$$

再证充分性，设 $BA=AB$ 成立，于是有

$$(A-B)(A+B)=A^2-BA+AB-B^2$$
$$=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$$

注意：对于数 a 与 b，等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 是成立的，之所以成立，是因为数的乘法满足交换律，即 $ab=ba$。现在，对于矩阵的乘法来说，因为一般地不满足交换律，所以本题中的两个矩阵等式不能无条件地成立。

9．解：将左端的乘积计算出来，再与右端比较：

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ \lambda^2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\lambda\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3\lambda\\ -2\lambda+\lambda\\ \lambda^2+2\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\lambda\\ 3\\ -1\end{bmatrix}.$$

得到关于 λ 的方程组：

$$\begin{cases}-2+3\lambda=-\lambda,\\ -2\lambda+\lambda=3,\\ \lambda^2+2\lambda=-1,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}4\lambda=2 & ①\\ -\lambda=3 & ②\\ \lambda^2+2\lambda+1=0 & ③\end{cases}$$

由①得 $\lambda=\frac{1}{2}$，由②得 $\lambda=-3$，由③得 $\lambda=-1$。

可见，这个关于 λ 的方程组是无解的，也就是说，适合原等式的 λ 值是没有的。

10。解：

(1) 先计算所给矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

所以，当 $ad-bc\neq 0$ 时，其逆矩阵存在，用公式法求逆矩阵，先计算各元素的代数余子式：

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|\,d\,| = d,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}|\,c\,| = -c,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|\,b\,| = -b,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}|a| = a.$$

由公式得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} x^2+1 & 2 \\ x & -1 \end{vmatrix} = -x^2-1-2x$

$$= -(x+1)^2.$$

所以当 $x+1\neq 0$，即 $x\neq -1$ 时，所给矩阵可逆. 各元素的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|-1|=-1.$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}|x|=-x,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}|2|=-2,$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}|x^2+1|=x^2+1.$$

代入公式得

$$\begin{bmatrix} x^2+1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-(x+1)^2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{(x+1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -(x^2+1) \end{bmatrix}.$$

(3) 因为行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

所以，逆矩阵存在，代数余子式为：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=(+3+5)=8,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-(-2-3)=5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=(-10+9)=-1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=-(4+25)=-29$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&5\\3&-1\end{vmatrix}=(-3-15)=-18,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-4\\3&-5\end{vmatrix}=-(-15+12)=3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-4&5\\-3&1\end{vmatrix}=(-4+15)=11,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}=-(3-10)=7,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&-4\\2&-3\end{vmatrix}=-9+8=-1.$$

代入公式，得：

$$\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}8&-29&11\\5&-18&7\\-1&3&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{bmatrix}.$$

(4) 因为 $\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&0\end{vmatrix}=3\neq0$ 所以逆矩阵存在，用公式法，具体作法同上，得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2 & -4/3 \end{bmatrix}$$

（5）方法同上，得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 16 & -11 \\ 12 & 12 & 12 & -12 \\ 75 & 97 & 92 & -85 \\ 3 & 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

（6）$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

（7）行列式 $$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

当 $\lambda^4 \neq 0$，即 $\lambda \neq 0$ 时，所给矩阵可逆，代数余子式为

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3,$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\\lambda&1&0\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{42}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=\lambda,$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-\lambda^2,$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3$$ 代入公式，得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\lambda^4}\begin{bmatrix}\lambda^3&-\lambda^2&\lambda&-1\\0&\lambda^3&-\lambda^2&\lambda\\0&0&\lambda^3&-\lambda^2\\0&0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$$

(8) 显然行列式 = 1，故逆矩阵存在．计算代数余子式：

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\cdots a^{n-1} \\ 0 & 1 & a\cdots a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1\cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 0 & a & a^2\cdots a^{n-1} \\ 0 & 1 & a\cdots a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=0.$$ （因为第一列元素全为零）

同理 $A_{13}=A_{14}=\cdots=A_{1n}=0$。（因为它们的第一列元素全为零）

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3\cdots a^n \\ 0 & 1 & a\cdots a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1\cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=-a,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3\cdots a^n \\ 0 & 1 & a\cdots a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1\cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^3\cdots a^n \\ 0 & 0 & a^2\cdots a^{n-2} \\ 0 & 0 & a\cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=0.$$ （因为前两列元素成比例）

同理 $A_{24}=A_{25}=\cdots=A_{2n}=0$。

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3\cdots a^n \\ 1 & a & a^2\cdots a^{n-1} \\ 0 & 0 & a\ \cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=0,\text{(前两列成比例)}$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3\cdots a^n \\ 0 & a & a^2\cdots a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1\ \cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=-a,$$

$A_{33}=1$,

$$A_{34}=-\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4\cdots a^n \\ 0 & 1 & a & a^3\cdots a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a\cdots a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{vmatrix}=0\ \text{(第二、三两列成比例)}$$

同理 $A_{35}=A_{36}=\cdots=A_{3n}=0$（第二、三两列成比例）依此类推，得 $A_{ii}=1$ （$i=1$、2、$\cdots n$）

$$A_{21}=A_{32}=A_{43}=\cdots=A_{n,n-1}=-a$$

其余诸代数余子式全为零。

故得所给矩阵的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3\cdots a^n \\ 0 & 1 & a & a^2\cdots a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a\cdots a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11.（1）解：由于矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，故在原方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

的两端“左乘”上$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$即可解出$X$：

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

即 $$X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

（2）解：作法与（1）相似，但要在方程两端“右乘”以 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$（注意，这是由于矩阵乘法不可交换的原故）：

$$X\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right)$$

即 $$X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -7 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

（3）解：方程两端“左乘”上$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

即可解出 X：

$$\begin{bmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}X$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

即

$$X=\begin{bmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 7\end{bmatrix}.$$

（4）解：设 $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$ $\quad X^2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}^2$

$$=\begin{bmatrix}x_1^2+x_2x_3 & x_1x_2+x_2x_4\\ x_1x_3+x_3x_4 & x_2x_3+x_4^2\end{bmatrix}.$$

由 $X^2=0$，得到方程组

$$\begin{cases}x_1^2+x_2x_3=0 & ①\\ x_1x_2+x_2x_4=0 & ②\\ x_1x_3+x_3x_4=0 & ③\\ x_2x_3+x_4^2=0 & ④\end{cases}$$

①－④得 $x_1^2-x_4^2=0$ 即 $x_1=x_4$⑤或 $x_1=-x_4$⑥，将⑤代入②与③分别得到 $2x_2x_4=0$ 与 $2x_3x_4=0$。如果 $x_2=0$ 与 $x_3=0$，再代入①与④便得到 $x_1^2=0$ 与 $x_4^2=0$，即 $x_1=0$ 与 $x_4=0$，如果 $x_4=0$，则 $x_1=0$，代入④得 $x_2x_3=0$，即 $x_2=0$，或 $x_3=0$，

即$X=\begin{bmatrix}0 & X_2\\0 & 0\end{bmatrix}$，或$X=\begin{bmatrix}0 & 0\\X_3 & 0\end{bmatrix}$

若将⑥代②与③得 x_2 与 x_3 可取任意值，故可使 $x_2x_3\leqslant 0$，此时由① 得 $x_1=\pm\sqrt{-x_2x_3}$，由⑥又得

$x_4=\pm\sqrt{-x_2x_3}$，合起来就是矩阵

$$\begin{bmatrix}\pm\sqrt{-x_2x_3}, & x_2\\ x_3 & \mp\sqrt{-x_2x_3}\end{bmatrix}$$

显然，当 $x_2=x_3=0$ 时这个矩阵就是零矩阵，故方程 $x^2=0$ 的解就是

$$X=\begin{bmatrix}\pm\sqrt{-x_2x_3} & x_2\\ x_3 & \mp\sqrt{-x_2x_3}\end{bmatrix}$$

其中 x_2，x_3 可取任何值，但应使其乘积 $x_2x_3\leqslant 0$，比如

$\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-\sqrt{6} & -2\\3 & \sqrt{6}\end{bmatrix}$等等，都是具体的解。

12．解，因为$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$所以$E-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$-\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{bmatrix}$

$(E-A)^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$ 故

$$(E+A)(E-A)^{-1}=\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\right]\left[-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&4\\4&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}.$$

13. 解：

(1) $\begin{bmatrix}a&b&1&0\\c&d&0&1\end{bmatrix}$（∵ a 与 b 不能同时为零，不妨设$a\neq0$，将第一行都除以 a .）

$\to\begin{bmatrix}1&b/a&1/a&0\\c&d&0&1\end{bmatrix}$（第二行减去第一行的 c 倍）

$\to\begin{bmatrix}1&b/a&1/a&0\\0&d-c&b/a-c/a&1\end{bmatrix}$$\left(\text{设}d-\dfrac{cb}{a}=\dfrac{ad-bc}{a}\right.$

$\neq0$。即 $ad-bc\neq0$。

第二行除以$\left.\dfrac{ad-bc}{a}\right)$

$\to\begin{bmatrix}1&b/a&1/a&0\\0&1&\dfrac{-c}{ad-bc}&\dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$（第一行减去第二行的$\dfrac{b}{a}$倍）

$\to\begin{bmatrix}1&0&\dfrac{d}{ad-ba}&\dfrac{-b}{ad-bc}\\0&1&\dfrac{-c}{ad-bc}&\dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$

故得$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix} x^2+1 & 2 & 1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$(第一行减去第二行的 x 倍)

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2+x & 1 & -x \\ x & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$(第二行减去第一行的 x 倍)

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2+x & 1 & -x \\ 0 & -(x+1)^2 & -x & 1+x^2 \end{bmatrix}$(设 $x+1\neq0$，将第二行除以 $-(x+1)^2$)

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2+x & 1 & -x \\ 0 & 1 & \dfrac{x}{(x+1)^2} & -\dfrac{1+x^2}{(x+1)^2} \end{bmatrix}$(第一行减去第二行的$(2+x)$倍)

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{(x+1)^2} & \dfrac{2}{(x+1)^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{x}{(x+1)^2} & \dfrac{-(1+x^2)}{(x+1)^2} \end{bmatrix}$$

故得$\begin{bmatrix} x^2+1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \dfrac{2}{(x+1)^2} \\ \dfrac{x}{(x+1)^2} & \dfrac{-(1+x^2)}{(x+1)^2} \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ x & -(x^2+1)\end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{bmatrix}3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$（第三行减去第一行然后第一行减去第二行）

$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$（第二行减去第一行的两倍）

$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$（第一、三两行都减去第二行）

$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 11 & 3 & -4 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$（第一、二两行分别减去第三行的11,(−7)倍）

$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$（第二行乘以(−1)）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

故得$\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}.$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$（第三行加上第二行，第一行减去第二行的 2 倍）

$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$（第一、二行分别减去第三行的4(-1)倍）

$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$（第一行除以 3 ）

$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2 & -4/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$（将第一、二、三行分别调到第三、一、二行）

故得 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（第二行加上第三行，然后第三行加上第一行的 2 倍第四行减去第一行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & -1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & -5 & 0 & 12 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 6 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（第三行加上第二行，第四行减去第二行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & -1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 17 & 2 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

（第一行加上第四行的3倍，第二行减去第四行的5倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -3 & -3 & 3\\0 & 0 & -1 & 5 & 5 & 6 & 6 & -5\\0 & 0 & -1 & 17 & 2 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

（第三行减去第二行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -3 & -3 & 3\\0 & 0 & -1 & 5 & 5 & 6 & 6 & -5\\0 & 0 & 0 & 12 & -3 & -5 & -4 & 5\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

（第三行除以12）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -3 & -3 & 3\\0 & 0 & -1 & 5 & 5 & 6 & 6 & -5\\0 & 0 & 0 & 1 & -3/12 & -5/12 & -4/12 & 5/12\\0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

（第一、二行都减去第三行的5倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/12 & -11/12 & -16/12 & 11/12 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 75/12 & 97/12 & 92/12 & -85/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/12 & -5/12 & -4/12 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

（将第二行乘以 -1，然后将第二、三、四行分别调为第三、四、二行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/12 & -11/12 & -16/12 & 11/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -75/12 & -97/12 & -92/12 & 85/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/12 & -5/12 & -4/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} -9/12 & -11/12 & -16/12 & 11/12 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -75/12 & -97/12 & -92/12 & 85/12 \\ -3/12 & -5/12 & -4/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{-1}{12}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 16 & -11 \\ 12 & 12 & 12 & -12 \\ 75 & 97 & 92 & -85 \\ 3 & 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(6)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -23 & 14 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（第一行加上第二行，第三行加上第四行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -23 & 14 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（第二、三、四行分别加上第一行的 -3、8、-23 倍）.

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 8 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & 3 & -23 & -23 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（第一、三、四行分别加上第二行的 1、3、-9 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（第一、二行都乘以 -1，第四行加上第三行的 2 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

（第三行加上第四行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

（7）显然只有当$\lambda\neq0$时，逆矩阵存在，故可设$\lambda\neq0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$（各行都除以λ）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1/\lambda & 0 & 0 & 1/\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\lambda & 0 & 0 & 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\lambda & 0 & 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

（第三行减去第四行第二$\frac{1}{\lambda}$倍，然后，第二行减去

第三行的$\frac{1}{\lambda}$倍，最后，第一行减去第二行的$\frac{1}{\lambda}$倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&1/\lambda&-1/\lambda^2&1/\lambda^3&-1/\lambda^4\\0&1&0&0&0&1/\lambda&-1/\lambda^2&1/\lambda^3\\0&0&1&0&0&0&1/\lambda&-1/\lambda^2\\0&0&0&1&0&0&0&1/\lambda\end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{bmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/\lambda&-1/\lambda^2&1/\lambda^3&-1/\lambda^4\\0&1/\lambda&-1/\lambda^2&1/\lambda^3\\0&0&1/\lambda&-1/\lambda^2\\0&0&0&1/\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda^4}\begin{bmatrix}\lambda^3&-\lambda^2&\lambda&-1\\0&\lambda^3&-\lambda^2&\lambda\\0&0&\lambda^3&-\lambda^2\\0&0&0&\lambda^3\end{bmatrix}.$$

(8)
$$\begin{bmatrix}1&a&a^2&a^3\cdots a^n&1&0&0&0\cdots0\\0&1&a&a^2\cdots a^{n-1}&0&1&0&0\cdots0\\0&0&1&a\cdots a^{n-2}&0&0&1&0\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\cdots1&0&0&0&0\cdots1\end{bmatrix}$$

（从第一行开始，顺次每一行减去其相邻下一行的 a 倍，即第一行减去第二行的 a 倍，然后，第二行减去第三行的 a 倍，等等）

线性

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&1&-a&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0&0&1&-a&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0&0&1&-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

故得
$$\begin{bmatrix}1&a&a^2&a^3\cdots a^n\\0&1&a&a^2\cdots a^{n-1}\\0&0&1&a\cdots a^{n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\cdots 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-a&0&0\cdots 0\\0&1&-a&0\cdots 0\\0&0&1&-a\cdots 0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\cdots 1\end{bmatrix}.$$

14. 证：因为A为可逆矩阵，所以可设它的逆矩阵为A^{-1}，即$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

(1) 由$AX=AY$得$A^{-1}(AX)=A^{-1}(AY)$

即 $(A^{-1}A)X=(A^{-1}A)Y$

即 $EX=EY$

即得 $X=Y$。

(2) 由$AB=BA$得

$A^{-1}(AB)A^{-1}=A^{-1}(BA)A^{-1}$

$(A^{-1}A)(BA^{-1})=(A^{-1})(AA^{-1})$

即 $E(BA^{-1})=(A^{-1}B)E$

故得 $BA^{-1}=A^{-1}B$

(3) 因为A是对称的，所以$A'=A$

于是 $(A')^{-1}=A^{-1}$

但 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$

故 $(A^{-1})'=A^{-1}$

这就表明 A^{-1} 也是对称矩阵。

15. 证：设三角形矩阵是上三角形

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

因为 A 是可逆的，且 $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故 $a_{ii}\neq 0$，（$i=1、2\cdots n$）对角线元素 a_{ii} 的代数余子式 $A_{ii}=a_{11}\cdots a_{i-1,i-1}a_{i+1,i+1}\cdots a_{nn}(i=1,2\cdots n)$ 计算右上角元素 $a_{ij}(i<j)$ 的代数余子式如下

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$ （因为第一列元素全为零）

同理　$A_{13}=A_{14}=\cdots=A_{1n}=0$，

$$A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0,$$ （因为前两列成比例）

同理　$A_{24}=A_{25}=\cdots=A_{2n}=0$，

$$A_{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25}\cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{45}\cdots a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots a_{n} \end{vmatrix}=0$$

这是因为右端的行列式中前两列成比例，其值为零。同理，$A_{35}=A_{36}=\cdots=A_{3n}=0$。

依此类推，用同样的方法，可得 $A_{ij}=0$，$(i<j)$ 故得逆矩阵

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\cdots A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\cdots A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}}\begin{pmatrix} a_{22}\cdots a_{nn} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ 0 & a_{11}a_{33}\cdots a_{nn}\cdots A_{n_2} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots a_{11}\cdots a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & b_{21} & b_{31}\cdots b_{n_1} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & b_{32}\cdots b_{n2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}}\cdots b_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}\left(\text{其中 } b_{ij}=\frac{A_{ij}}{a_{n}a_{22}\cdots a_{nn}}\right)$$

这表明A的逆矩阵A^{-1}仍是上三角形矩阵。

同理可证，当A是可逆下三角形矩阵，其逆矩阵也是下三角形矩阵。

第 四 章

1．解：只需把所给方程组的系数及常数项写成对应的矩阵，叫方程组的增广矩阵并用$\overline{A}$表示。对方程组使用消元法求解，实质上就是对它的增广矩阵施用行的初等变换化为标准形。

(1)
$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\3&1&-5&0\\4&-1&-5&-3\\1&3&-13&-6\end{bmatrix}\text{（第一、二、三行分别减去第四行的2，3、4倍}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&-7&29&15\\0&-8&34&18\\0&-13&47&21\\1&3&-13&-6\end{bmatrix}\text{（第一行减去第二行）}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&1&-5&-3\\0&-8&34&18\\0&-13&47&21\\1&3&-13&-6\end{bmatrix}\text{（第二、三、四行分别减去第一行的}-8\text{、}-13\text{、}3\text{倍）}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&1&-5&-3\\0&0&-6&-6\\0&0&-18&-18\\1&0&2&3\end{bmatrix}\text{（第三行减去第二行的3倍，然后将第二行乘以}-\frac{1}{6}\text{）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&-5&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&2&3\end{bmatrix}$$（第一、四行分别减去第二行的－5、2倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

容易看出最后这个矩阵实质上就是标准形，不必再化成

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$的形式了。它所对应的方程组就是

$$\begin{cases}x_2=2,\\x_3=1,\\x_1=1.\end{cases}$$也就是所给方程组有唯一解（因为非零行的个数＝未知量的个数）就是 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$

（2）$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&2&-3&2\\5&1&-1&2&-1\\2&-1&1&-3&4\end{bmatrix}$$（第二、三、四行分别减去第一行的－2、1、－1倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\7&0&0&-1&4\\3&0&0&1&-2\\4&0&0&-2&5\end{bmatrix}$$（第一、二、四行分别减去第三行－1、－2倍）

线

性

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}（第二行减第四行）$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第二行对应一个矛盾方程：$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=1$ 故原方程组无解，

(3)

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}（第一行减去第三行）$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$（第一行减去第四行，然后，第四行加上第二行的 3 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$（第四行加上第一行的 2 倍然后第一行乘以$\frac{1}{2}$，然后第二、三行分别减去第一行的 1，3 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1 & 3\\0 & 0 & -1 & 2 & -6\\1 & 0 & 0 & 0 & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{（第二行乘以}-1\text{）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1 & 3\\0 & 0 & 1 & -2 & 6\\1 & 0 & 0 & 0 & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由最后的矩阵得原方程组的一般解：

$$\begin{cases}x_1=-8\\x_2=3+x_4\\x_3=6+2x_4\\x_4\ \text{为自由未知量。}\end{cases}$$

（4）

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\2 & -1 & 3 & 0\\3 & -5 & 4 & 0\\1 & 17 & 4 & 0\end{bmatrix}\text{（第二、三、四行分别减去第一行的 2，3，1 倍）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\0 & -7 & -1 & 0\\0 & -14 & -2 & 0\\0 & 14 & 2 & 0\end{bmatrix}\text{（第一、三、四行分别减去第二行的}-2\text{、2、}-2\text{ 倍）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -11 & 0 & 0\\0 & -7 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{（第二行乘以}-1\text{）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -11 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由最后的矩阵得原方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1 = 11x_2\\ x_3 = -7x_2\\ x_2 \text{ 为自由未知量.}\end{cases}$$

注：本题是齐次线性方程组，是一般线性方程组的特殊情况，当然可以用上述方法求解，但从解题过程中可以发现，增广矩阵的最后一列，也就是常数列全是零，对$\overline{A}$进行行的初等变换的过程中，对这一列元素的值没有任何改变。因而可以把求解方法简化，即只要对齐次方程组的系数矩阵A进行行的初等变换化为标准形就可以了。这就是通常采用的方法。

(5)
$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1 & 1 & b\\ 1 & 1 & -1 & 1 & c\\ 1 & 1 & 1 & -1 & d\end{bmatrix}\text{（将第二、三、四行都加到第一行上去）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2 & a+b+c+d\\ 1 & -1 & 1 & 1 & b\\ 1 & -1 & 1 & 1 & c\\ 1 & 1 & 1 & -1 & d\end{bmatrix}\text{（第一列除以 2）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & -1 & d \end{bmatrix}$$

（第二、三、四行分别减去第一行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b+c+d) \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2}(a+b-c+d) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2}(a+b+c-d) \end{bmatrix}$$

（第二、三、四行分别乘以 $-\frac{1}{2}$）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(a-b+c+d) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(a+b-c+d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(a+b+c-d) \end{bmatrix}$$

（从第一行依次减去第二、三、四行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(-a+b+c+d) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(a-b+c+d) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(a+b-c+d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(a+b+c-d) \end{bmatrix}$$

显然得到原方程组的唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(-a+b+c+d) \\ x_2 = \frac{1}{4}(a-b+c+d) \\ x_3 = \frac{1}{4}(a+b-c+d) \\ x_4 = \frac{1}{4}(a+b+c-d) \end{cases}$$

(6) 容易看出，所给方程组可以分成两个彼此无关的方程组：

$$(\text{I})\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 2 \\ \quad -x_3 + x_5 = 0. \end{cases} \qquad (\text{II})\begin{cases} x_2 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 2 \\ \quad -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$

并且，这两个方程组除了未知量的编号不同之外，它们的增广矩阵是完全一样的. 因此,只要求解其中一个方程组即可. 解(Ⅰ)：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{(第二行分别加上第一、三行)}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{(第一、三行分别减去第二行)}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{(第二行乘以}-1\text{)}$$

$$
\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}
$$

由此得出（Ⅰ）的解为 $x_1=-2$，$x_3=-3$，$x_5=-3$。

同理可得（Ⅱ）的解为 $x_2=-2$，$x_4=-3$，$x_6=-3$，合起来就得到所给方程组的解为

$x_1=-2$，$x_2=-2$，$x_3=-3$，$x_4=-3$，$x_5=-3$，$x_6=-3$。

2.（1）解

$$
\overline{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{bmatrix}
$$
（第一、三行分别减去第二行的2，1倍）

$$
\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{bmatrix}
$$
（第三行加上第一行）

$$
\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}.
$$

显然，当 $\lambda-5=0$ 即 $\lambda=5$ 时没有矛盾方程，此时所给方程组有解。当 $\lambda=5$ 时将最后一个矩阵的第一行乘上 $\frac{1}{3}$ 然后第二行加上第一行，就得到下面的标准形矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -5/3 & 1 & -7/3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此得出原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 = -1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_4 \\ x_2, x_4 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

(2) 解：

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \text{（第一、三行分别减去第二行的}\lambda, 1\text{ 倍）}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \text{（第一行加上第三行）}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} = \overline{A}_1$$

当 $\lambda-1\neq 0$，即 $\lambda\neq 1$ 时将 $\overline{A}_1$ 的第一行及第三行都乘以 $\frac{1}{\lambda-1}$，得

$$\overline{A}_1 \to \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda+2) & 0 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \text{（第二行减去第三行）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -(\lambda+2) & 0 & -1\\ 1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}=\overline{A}_2$$

当$\lambda+2\neq0$，即$\lambda\neq-2$时，$\overline{A}_2$的第一行乘以$\frac{-1}{\lambda+2}$，

得

$$\overline{A}_2\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2}\\ 1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$（第二、三行分别减去第一行的$\lambda+1$，-1倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2}\\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{bmatrix}$$

由此知道原方程组的解的情况是：

（1）当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，有唯一解：

$$x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\quad x_2=\frac{1}{\lambda+2}\quad x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

（2）当$\lambda=1$时，

$$\overline{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

一般解为 $\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3\\ x_2、x_3\text{为自由未知量}\end{cases}$

（3）当$\lambda=-2$时，

$$\overline{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

第一行对应着矛盾方程，故无解.

3. 解：$3(1,0,1,4)+(2,1,3,0)-\frac{1}{2}(4,1,0,3)$

$=(3,0,3,12)+(2,1,3,0)-(2,\ \frac{1}{2},\ 0,\frac{3}{2})$

$=(3+2-2,\ 0+1-\frac{1}{2},\ 3+3-0,\ 12+0-\frac{3}{2})$

$=(3,\ \frac{1}{2},\ 6,\frac{21}{2})$

4. 解：从所给的向量方程

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha=0$$

中可以解出 α，经计算得：

$\alpha=-\frac{1}{4}\alpha_1-\frac{2}{4}\alpha_2-\frac{3}{4}\alpha_3$

$=-\frac{1}{4}(5,-8,-1,2)-\frac{2}{4}(2,-1,4,3)-\frac{3}{4}(-3,$

$2,-5,4)$

$=\left(-\frac{5}{4}-\frac{4}{4}+\frac{9}{4},\ \frac{8}{4}+\frac{2}{4}-\frac{6}{4},\ \frac{1}{4}-\frac{8}{4}+\frac{15}{4},\right.$

$\left.-\frac{2}{4}-\frac{6}{4}-\frac{12}{4}\right)$

$=(0,\ 1,\ 2,\ -5)$

5．解：

（1）因为 α_1 与 α_2 不成比例，所以 α_1 与 α_2 线性无关；

（2）因为 $\alpha_1=\frac{2}{3}\alpha_3$，所以 α_1 与 α_2 线性相关；

（3）因为以 α_1，α_2，α_3 为行作成的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -75 \neq 0$$

所以，α_1，α_2，α_3 线性无关。

（4）因为 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

所以 α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关。

6．解：

（1）设　$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

即　$(5,3,-5,3) = x_1(4,2,-6,2) + x_2(6,3,-9,3)$
$+ x_3(1,\ 1,\ 1,\ 1) = (4x_1+6x_2+x_3,\ \ 2x_1+3x_2+x_3,\ \ -6x_1$
$-6x_1-9x_2+x_3,\ 2x_1+3x_2+x_3)$。

由向量相等的定义得到关于 x_1，x_2，x_3 的线性方程组：

$$\begin{cases} 4x_1+6x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=3 \\ -6x_1-9x_2+x_3=-5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$$

求得这个方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_3 = 1 \\ x_2 \text{为自由未知量。} \end{cases}$$

即对任何实数λ，等式

$$\beta = (1 - \frac{3}{2}\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \alpha_3$$

均成立。比如取 $\lambda = 2$，则有 $\beta = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$。
取 $\lambda = 0$，则有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_3$ 等等。这说明 β 被 α_1，α_2，α_3 线性表示的方式有无穷多种。

（2）方法同（1）设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

得方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10\text{。} \end{cases}$$

求得唯一解 $x_1 = -1$，$x_2 = -2$，$x_3 = -3$，故 β 可用 α_1，α_2，α_3 唯一线性表示：$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$

（3）设　$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，

得方程组
$$\begin{cases} 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 4\text{。} \end{cases}$$

经消元法计算，这个方程组无解，故β不能用α_1，α_2，α_3线性表示。

7．解：

（1）设：$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$。

得方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 9 \\ 5x_1 + 7x_2 + 12x_3 = \lambda. \end{cases}$

求得这个方程组当$\lambda = 17$时有解，一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \\ x_3 \text{为自由未知量.} \end{cases}$$

故当$\lambda = 17$时，对任何实数k，下面的等式都成立：

$$\beta = (2-k)\alpha_1 + (1-k)\alpha_2 + k\alpha_3$$

（2）设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$。

得方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 9, \\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 13. \end{cases}$$

求得当λ为任何值时，方程组总有唯一解：

$$x_1 = -2 + \frac{2}{3}\lambda, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3 - \frac{\lambda}{3}.$$

即对任何给定的λ值，β都能唯一地被α_1，α_2，α_3线性表示：

$$\beta = (-2 + \frac{2}{3}\lambda)\alpha_1 - \alpha_2 + (3 - \frac{\lambda}{3})x_3$$

比如，

当 $\lambda=0$ 时，有 $(0,9,13)=-2(2,3,5)-(-1,3,7)+3(1,6,10)$。

当 $\lambda=3$ 时有 $(3,9,13)=-(-1,3,7)+2(1,6,10)$ 等等。

8. 解：

(1) 首先用初等变换将矩阵化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}3&1&8\\-9&-3&7\\2&0&1\end{bmatrix}\text{（第二行加上第一行的 3 倍）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&8\\0&0&31\\2&0&1\end{bmatrix}\text{（第三行减去第二行的}\frac{1}{31}\text{倍）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&8\\0&0&31\\2&0&0\end{bmatrix}=J\text{（第三行与第二行对调）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&8\\2&0&0\\0&0&31\end{bmatrix}\text{（第一列与第二列对调）}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&8\\0&2&1\\0&0&31\end{bmatrix}.$$

最后一个矩阵是阶梯形，数一数它的非零行共有 3 个，所以知道原矩阵 A 的秩 $=3$，所以它的三个行构成一个极大无关

行，三个列构成一个极大无关列.

注：读者不难发现，上面第三个矩阵 J 能当作阶梯形使用，这样可省去一些对调行或列的初等变换.

(2) $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\4&-2&1&3\\6&-3&9&2\\8&-5&2&1\end{bmatrix}$（第二、三、四行分别减去第一行的2，3，4倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&0&-5&-7\\0&0&0&-13\\0&-1&-10&-19\end{bmatrix}.$$

非零行有四个，所以 A 的秩 $=4$，它的四个行构成一个极大无关行，四个列构成一个极大无关列.

(3) 用上述方法计算出 A 的秩 $=2$，所以知道它的极大无关行（列）含有两个无关行(列)，又因为右上角的二阶子行列式 $\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}\neq0$，故这个子行列式所在的第一、二两个行构成 A 的一个极大无关行，它所在的第三、四两个列构成 A 的一个极大无关列.

(4) 用上面的方法，求得矩阵 A 的秩 $=2$，又因为 $\begin{vmatrix}5&3\\5&4\end{vmatrix}\neq0$，故 A 的第一、三两个行构成它的一个极大无关行；第一、三两个列构成它的一个极大无关列.

9. 解：

(1)
$$A=\begin{bmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ -3 & -6 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$（第三行减去第二行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{bmatrix}=A_1$$

则 A_1 的秩 = A 的秩。

$$|A_1|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$=-(1-\lambda)^2(\lambda+2)$。

显然，当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$|A_1|\neq0$，A 的秩 = 3

当 $\lambda=1$ 时。$A_1=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，得 A 的秩 = 1

当 $\lambda=-2$ 时，$A_1=\begin{bmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}$，

得 A 的秩 = 2。

(2)
$$A=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1 & 0 & 0\\ -14 & -1-\lambda & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1\\ -17 & -6 & -1 & -\lambda\end{bmatrix}$$

由于A的左下角的二阶子式$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -17 & -6 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$，

所以A的秩$\geqslant 2$，左上角的二阶子式$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$=\lambda^2-2\lambda+11$无实根；右下角的二阶子式$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$，根为1.

因为$|A| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -14 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$=(\lambda^2-2\lambda+11)(\lambda-1)^2$，故若（1）当$\lambda \neq 1$且$\lambda^2-2\lambda+11 \neq 0$，即 $\lambda \neq \frac{2 \pm \sqrt{40}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{10}\, i (i=\sqrt{-1})$，$|A| \neq 0$，即$A$的秩$=4$

（2）当 $\lambda = 1 \pm \sqrt{10} i$时，$A$的秩$=3$（因为此时前两行线性相关）

（3）当 $\lambda = 1$时　A的秩$=3$.（因为此时$|A|$中最高阶非零子式为$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -14 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$）

10．解：将每一个向量看成一个行，由向量组可得对应的矩阵，矩阵的秩与最大无关行就是向量组的秩与最大无关组.

（1）向量组对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$（第二行减去第一行，然后第一行减去第三行）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$（第一、三行分别减去第二行的3，-1倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 5 & 10\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

可知向量组的秩＝矩阵A的秩＝4，向量组线性无关，它本身就是一个最大无关组

（2）向量组对应的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

经计算，A的秩＝2，故向量组的秩＝2

又$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq0$，所以，$\alpha_1$、$\alpha_2$构成一个最大无关组.

（3）向量组对应的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&2&3&1&0\\3&2&1&0&0\\1&4&7&2&3\end{bmatrix}$$

经计算，A的秩 = 3，故向量组的秩 = 3

又$\begin{vmatrix}1&0&3\\3&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-3\neq0$所以$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$构成一个最大无关组。

（4）向量组对应的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}9&0&0&6\\8&1&0&3\\7&8&13&17\\6&9&13&14\end{bmatrix}$$

经计算，A的秩 = 3，故向量组的秩 = 3

又$\begin{vmatrix}9&0&0\\8&1&0\\7&8&13\end{vmatrix}=117\neq0$，所以$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$构成一个最大无关组。

11. 解：计算系数矩阵A及增广矩阵的秩（这两项计算可以合并在$\bar{A}$中进行）再根据方程组有解的判定法则作出所需要的结论。

(1)
$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right]$$（第二、三、四行分别减去第一行的 2，1，1 倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right]$$（第二行加上第四行）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right]$$（第二行减去第三行的 4 倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -11\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right].$$

可以看出，A 的秩 $=3$，$\bar{A}$ 的秩 $=4$，因为 A 的秩 $\neq \bar{A}$ 的秩，所以方程组无解．

(2)
$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{array}\right]$$（第一行减去第三行）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ （第一，四行分别减去第二行的 -1，1倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ （第四行减去第一行的 2 倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

可以看出A的秩 = $\bar{A}$ 的秩 = 3＜未知量的个数 = 4，故方程组有解，解有无穷多个，且知含有一个自由未知量．

(3)
$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

（第二、三、四、五行分别减去第一行）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$ （第三、四、五行分别减去第二行的 -1、-1、1倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$（第三、四行分别减去第五行的5，7倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

（第二行减去第四行的 2 倍，然后再减去第三行的 $\frac{3}{2}$倍）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

可以看出，A的秩 = 5 = 未知量个数，显然A的秩 = $\bar{A}$ 的秩，故方程组有解，且解是唯一的.

12. 解：$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 & 1 \end{array}\right]$（第二、三分别减去第一行）

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+2 & 1-\lambda\end{array}\right]$$ (第一，三行分别加上第二行的 $\frac{\lambda+1}{2}$，$\frac{\lambda+2}{2}$ 倍)

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{array}\right]$$ (第一行减去第三行 的 λ 倍)

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{array}\right].$$

可以看出：1°当 $\lambda\neq 0$ 时，A的秩 = 3 = 未知 量 个 数 = $\bar{A}$ 的秩，故方程组有唯一解

2°当 $\lambda=0$ 时，A的秩 = 2，$\bar{A}$ 的秩 = 2.

由于A的秩 = $\bar{A}$ 的秩，故方程组有解，且有无穷多个解，一般解中含有一个自由未知量.

13. 解：先求齐次方程组的系数矩阵的秩

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$ (第二、四行分别减去第一行的 3，5 倍)

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

显然可以看出A的秩 = 2 小于未知量个数，由基础解系 定理

知道所给方程组有基础解系，且每一个基础解系含有5－2＝3个线性无关解．所给出的四个向量虽经验算知道都是齐次方程组的解，但解的个数是4而不是3，因而它们不可能构成基础体系．

注，还可用下面的解法：经验算四个向量都是解，下面用矩阵求它们的秩：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{（第二、四行减去第一行）}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{（第四行加上第二行的2倍）}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

可以看出这个向量组的秩＝3，小于向量个数，因而这四个解向量是线性相关的，但基础解系中的解向量应该是线性无关的，故所给的四个向量不是基础解系。

14．解：

(1)
$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\4&-2&1&3\\6&-3&9&2\\8&-5&-2&1\end{bmatrix}$$
（第二、三、四行分别减去第一行的 2、3、4 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&0&-5&-7\\0&0&0&-13\\0&-1&-14&-19\end{bmatrix}.$$

可以看出，A的秩 = 4 = 未知量个数，齐次方程组只有零解，也就是没有基础解系。

(2)
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{bmatrix}$$
（第二、三、四行分别减去第一行的 1、3、1 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{bmatrix}$$
（第一、三、四行分别减去第二行的 $-\frac{1}{2}$，1，2 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
（第二行乘以$\frac{1}{2}$）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由此得齐次方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4,\\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4,\\ x_3、x_4 \text{为自由未知量}.\end{cases}$$

令 $x_3 = 2$，$x_4 = 0$，得解：$\alpha_1 = (-3,\ 7,\ 2,\ 0)$

令 $x_3 = 0$，$x_4 = 1$，得解：$\alpha_2 = (-1,\ -2,\ 0,\ 1)$.

则 α_1，α_2 构成齐次方程组的一个基础解系.

(3)

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$ (第三、四行分别减去第一行)

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$ (第二、四行分别减去第三行的 2，-1 倍)

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此得方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1 = 2x_2 - x_3,\\x_4 = 0,\\x_2,\ x_3\ \text{为自由未知量.}\end{cases}$$

令 $x_2 = 1$，$x_3 = 0$，得解：$\alpha_1 = (2,\ 1,\ 0,\ 0)$，

令 $x_2 = 0$，$x_3 = 1$，得解：$\alpha_2 = (-1,\ 0,\ 1,\ 0)$.

则 α_1，α_2 构成齐次方程组的一个基础解系.

（4）$$A = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 4\\6 & -2 & 1 & 3 & 7\\6 & -2 & 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$（第二，三行分别减去第一行的2,2倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 4\\0 & 0 & -3 & 3 & -1\\0 & 0 & -1 & 1 & 8\end{bmatrix}$$（第二行减去第三行的3倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 25\\0 & 0 & -1 & 1 & -8\end{bmatrix}$$（第二行乘以$\frac{1}{25}$，然后,第一、三行分别减去第二行的4,－8倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

由此得方程组的一般解为：

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 2x_3 \\ x_4 = x_3 \\ x_5 = 0, \\ x_1、x_3 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$，$x_3 = 0$ 得解 $\alpha_1 = (1, 3, 0, 0, 0)$，

令 $x_1 = 0$，$x_3 = 1$ 得解 $\alpha_2 = (0, 2, 1, 1, 0)$，

则 α_1，α_2 构成一个基础解系。

15. 证 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$。 (1)

将 β_1、β_2、β_3 的表示式代入得

$$x_1\alpha_1 + x_2(\alpha_1 + \alpha_2) + x_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

整理成为 $(x_1 + x_2 + x_3)\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$，

因为 α_1、α_2、α_3 线性无关，所以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 0 \end{cases}$$

因为系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以这个齐次方程组

只有零解，即 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，这就是说，若关系式（1）成立，则必有 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，根据定义知道 β_1，β_2，β_3 线性无关。

16. 证：由题意，可设有等式

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r \qquad (*)$$

（1）用反证法、假设 α_r 能由 α_1、$\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}$ 线性表出，即有等式

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1}$$

成立，将此等式代入（*），经整理得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1} + \alpha_{r-1} + k_r(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1})$$

$$= (k_1 + k_r l_1)\alpha_1 + (k_2 + k_r l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_{r-1} + k_r l_{r-1})\alpha_{r-1}$$

这表明 β 能由 α_1，α_2，$\cdots\alpha_{r-1}$ 线性表示，此与题设 β 不能由 α_1，$\alpha_2\cdots$，α_{r-1} 线性表示相矛盾，故 α_r 不能由 α_1，α_2，$\cdots\alpha_{r-1}$ 线性表出。

（2）在式（*）中必有系数 $k_r \neq 0$，因为否则，若 $k_r = 0$，（*）就成为 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1}$，就表明 β 能由 α_1，$\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}$ 线性表示，此与题设矛盾，故 $k_r \neq 0$，这样就可从（*）中解出 α_r，

$$\alpha_r = \frac{1}{k_r}\beta - \frac{k_1}{k_r}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_r}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1}.$$

这就表明 α_r 可由 α_1，α_3，$\cdots\alpha_{r-1}$，β 线性表示。

第　五　章

1．**解：**

（1）二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -6 & 10 & 20 \\ -9 & 20 & 25 \end{bmatrix}$.

(2) 二次型的矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. 解：

(1) $f = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3$；

(2) $f = -20x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$。

3. 解：用配方法解之。

(1) 先对 x_1 配方：

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &\quad + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3. \end{aligned}$$

再对余下的 x_2 与 x_3 的二次型中的 x_2 配方：

$$\begin{aligned} f &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

已经没有交叉乘积项了，配方完毕。

$$令\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

$$即\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

则 $f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$

式（*）即为所用的满秩线性变换的逆变换

（2）先对 x_1 配方

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3.
\end{aligned}
$$

再对 x_2 配方（在余下的二次型中）

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2.
\end{aligned}
$$

已经没有交叉乘积项了，配方完毕，

令
$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\
y_3 = 2x_2 + x_3, \\
y_3 = x_3.
\end{cases}
$$

即
$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (*)
$$

则 $f = {y_1}^2 - {y_2}^2$.

式（*）即为所用的满秩线性变换的逆变换.

（3）f 中没有平方项，不能配方，先作辅助线性变换

$$
\begin{cases}
x_1 = y_1 + y_2, \\
x_2 = y_1 - y_2, \\
x_3 = y_3, \\
y_4 = y_3.
\end{cases}
$$

即 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

则 $$\begin{aligned} f &= (y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3+(y_1+y_2)y_4 \\ &\quad +(y_1-y_2)y_3+(y_1-y_2)y_4+y_3y_4 \\ &= y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_1y_4+y_3y_4 \\ &= y_1^2+2y_1y_3+2y_1y_4-y_2^2+y_3y_4 \\ &= (y_1+y_3+y_4)^2-y_3^2-y_4^2-2y_3y_4-y_2^2 \\ &\quad +y_3y_4 \\ &= (y_1+y_3+y_4)^2-y_3^2-y_3y_4-y_4^2-y_2^2 \\ &= (y_1+y_3+y_4)^2-(y_3+\frac{1}{2}y_4)^2+\frac{1}{4}y_4^2 \\ &\quad -y_4^2-y_2^2 \\ &= (y_1+y_2+y_3)^2-(y_3+\frac{1}{2}y_4)^2-\frac{3}{4}y_4^2-y_2^2. \end{aligned}$$

令 $$\begin{cases} z_1 = y_1+y_2+y_3, \\ z_2 = y_3+\frac{1}{2}y_4, \\ z_3 = y_4, \\ z_4 = y_2. \end{cases}$$

即 $$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} (**)$$

则 $f=z_1^2-z_2^2-\frac{5}{4}z_2^2-z_4^2$

(**) 的逆变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

代入 (*) 得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (***)$$

(***) 即为所用的满秩线性变换。

4. 解：$f=(x_1+x_2+2x_3)^2-x_2{}^2-4x_3{}^2-4x_2x_3$

$$-2x_2{}^2+x_3{}^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2$$

$$+3\cdot\frac{1}{9}x_3^2-3x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2-3(x^2+\frac{1}{3}x_3)^2$$

$$-\frac{8}{3}x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2-(\sqrt{3}x_3$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3\right)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+2x_3, \\ y_2=\sqrt{3}x_2+\frac{\sqrt{3}}{3}x_3, \\ y_3=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3. \end{cases}$

即
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

则将 f 化为规范形：$f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(*) 即为所用的实满秩线性变换的逆变换

(1) 求 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式

$\triangle_1=2>0$，$\triangle_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$，$\triangle_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2>0$

因为所有的顺序主子式都大于零，故 A 为正定矩阵.

(2) 求 A 的各阶顺序主子式.

$\triangle_1=1>0$，$\triangle_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$。

因为二阶顺序主子式 $\triangle_2=0$，故知 A 不是正定矩阵.

6。解：只需求 λ 的值使二次型的矩阵为正定矩阵即可

(1) f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}$

A 的各阶顺序主子式为：$\triangle_1=5>0$，$\triangle_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0$

$$\triangle_3=\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda-2。$$

当 $\lambda-2>0$，即 $\lambda>2$ 时，$\triangle_3>0$，则 A 的所有顺序余子式都大于零，从而 A 为正定矩阵，即 f 为正定次型.

(2) f 的矩阵为 $A = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

计算 A 的各阶顺方余子式

$$\triangle_1 = 2 > 0,\quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2$$

要使 A 为正定矩阵必须且只须 $\begin{cases} 2 - \lambda^2 > 0 \\ 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{cases}$

解之得 $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}$。

即当 $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda \lessgtr \sqrt{\frac{5}{3}}$ 时，f 为正定二次型。

7．解：(1)先求 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值：

$$|\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - 1] = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$（二重）

再求特征向量：

对于 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)X=0$：

$$\lambda_1 E-A=-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

得基础解系　　$\alpha_1=(-1,\ 0,\ 1)$。

对于　$\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$：

$$\lambda_2 E-A=2E-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

得基础体系 $\alpha_2=(1,\ 0,\ 1)$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)$。

因此，属于特征值 $\lambda_1=0$ 的全体特征向量为 $k\alpha_1(k\neq0)$；属于特征值 $\lambda_2=2$ 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2(k_1$、$k_2$ 不同时为零)。

(2) 先求 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的特征值。

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}$$ (第一、二、三行分别减去第四行的 1、-1、-1 倍)

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$ （第四列分别减去第二、三列，然后第四列再加上第一列）

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3).$$

由此得A的特征值$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=1$（三重）

再求特征向量：

对于特征值$\lambda_1=-3$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ （将第二、三、四行都加到第一行）

$$\to\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ （第一行乘以$-\frac{1}{4}$）

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ （第二、三、四行分别减去第一行的-1、-1、1倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&2&0\\0&2&-2&0\\0&-2&-2&-4\end{bmatrix}$$（第一、三、四行分别减去第二行的 $-\frac{1}{2}$，-1，1 倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&-2&2&0\\0&0&0&0\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}$$（第一行加上第四行的$\frac{1}{4}$倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&-2&2&0\\0&0&0&0\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}.$$

得基础解系 $\alpha_1=(-1, 1, 1, -1)$。

对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $[\lambda_2E-A]X=0$。

$$\lambda_2E-A=E-A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$（第二、三、四行分别加上第一行的1、1、－1倍）

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

得基础解系 $\alpha_1=(1, 1, 0, 0)\alpha_2=(1,0,1,0),\alpha_3=(-1, 0, 0, 1)$

故属于特征值$\lambda_1=-3$的全体特征向量是$k\alpha_1$，$(k\neq 0)$；属于特征值$\lambda_2=1$的全体特征向量是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$（$k_1$，$k_2$，$k_3$不同时为零）。

8．解：

（1）　$f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$

f的矩阵为　$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

这个矩阵的特征值与特征向量在题7（1）已求出：特征向量$\alpha_1=(-1、0、1)$ $\alpha_2=(1、0、1)\alpha_3=(0、1、0)$、分别属于特征值0，2，2，并且$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$已经两两正交，现将它们标准化，取$\beta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1)=(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\beta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\beta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\frac{1}{1}(0,1,0)=(0,1,0).$$

则标准正交向量组β_1，β_2，β_3仍是A的分别属于特征值0、2，2的特征向量，以β_1，β_2，β_3作为列得到矩阵

$$C=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

则C为正交矩阵，经过正交变换$X=CY$，则二次型化为平方和：

$$f=0y_1{}^2+2y_2{}^2+2y_3{}^2=2y_2^2+2y_3^2$$

(2) $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_3$的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

先求A的特征值：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-1)^2-1]$$

$$=\lambda[\lambda(\lambda-2)]=\lambda^2(\lambda-2).$$

所以A的特征值为　$\lambda_1=0$(二型)$A_2=2$。

再求A的特征向量：

对于$\lambda_1=0$，解齐次线性方程组$(\lambda_1E-A)X=0$

$$\lambda_1E-A=0-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

得基础解系：　$\alpha_1=(1,\ 0,\ -1)$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)$

对于　$\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(\lambda_2E-A)X=0$：

$$A_2E-A=2E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

得基础解系　$\alpha_3=(1,\ 0,\ 1)$

可以看出α_1、α_2、α_3已经两两正交，现在将它们标准化：取

$$\beta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\beta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\frac{1}{1}(0,\ 1,\ 0)$$

$$=(0,\ 1,\ 0),$$

$$\beta_3=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

则β_1，β_2，β_3是A的分别属于特征值0，0，2的标准正交特

征向量，用它们做为列得到正交矩阵 C。

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

用正交变换 $X=CY$，可将二次型 f 化为平方和：

$$f=0y_1^2+0y_2^2+2y_3^2=2y_3^2$$

（3）解：$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

先求 A 的特征值：

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4\lambda-4(\lambda-2)$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-8\lambda+8$$

$$=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^2-2\lambda-8\lambda+8$$

$$=(\lambda^3-\lambda^2)-2(\lambda^2-\lambda)-8(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$。$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-2$

再求特征向量。

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$：

$$\lambda_1 E - A = E - A = \begin{bmatrix} -1 & +2 & 0 \\ +2 & 0 & +2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (2, 1, -2)$

对于 $\lambda_2 = 4$，解齐线性方程组$(\lambda_2 E - A)X = 0$：

$$\lambda_2 E - A = 4E - A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (2，-2，1)$

对于 $\lambda_3 = -2$，解各次线性方程组 $(\lambda_3 E - A)X = 0$：

$$\lambda_3 E - A = -2E - A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = (1，2，2)$，

因为三个特征值互不相同，所以 α_1，α_2，α_3 必定两两正交，现在将它们标准化：

$$取 \beta_1 = \frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1 = \frac{1}{3}(2，1，-2)$$

$$=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right),$$

$$B_2=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_2=\frac{1}{3}(2,\ -2,\ 1)$$

$$=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),$$

$$\beta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=(1,\ 2,\ 2)$$

$$=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

β_1，β_2，α_3是A的分别 属于特征值1，4，-2的标准正特征向量，用它们作为列，可得正交矩阵C。

$$C=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

过正交变换$X=CY$，可将二次型f化成平方和：

$$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2.$$